

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Technische Notitie TN 25

Onderzoek naar het spanningsverloop
in de wand van een kegelvormig watervat

door

K.D. Venhuizen
R.P. van de Riet

December 1962

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Summary

In the first part of this report, K.D. Venhuizen (Gemeentewaterleidingen-Amsterdam) derives a 4th-order differential-equation, which describes the change of shape of the wall of a conical water-tank, when it is filled. In the second part a numerical-analytical and a pure numerical solution of this differential-equation is given by R.P. van de Riet (Mathematical Centre, Amsterdam).

Onderzoek naar het spanningsverloop in de
wand van het kegelvormig waterreservoir
aan de Amstelveenseweg.

Afleiding van de differentiaalvergelijking :

Het kegelvormige waterreservoir wordt belast door :

- waterdruk
- gewicht bovenbouw van de tank
- eigen gewicht van de wand

De differentiaalvergelijking van de 4^e orde wordt gevonden met behulp van de theorie van de elastisch ondersteunde ligger.

In fig. 1 staan de diverse grootheden weergegeven.
De daarin gebruikte afkortingen zijn :

$$\begin{aligned}\sin \beta &= s \\ \cos \beta &= c \\ \operatorname{tg} \beta &= t = \frac{s}{c}\end{aligned}$$

Verder is in het nu volgende :

$$\begin{aligned}\gamma &= \text{soortelijk gewicht water} \\ \chi &= \text{soortelijk gewicht stalen mantel} \\ K &= \text{gewicht bovenbouw van de tank} \\ &\quad (\text{inclusief nuttige belasting}) \\ p_x &= \text{waterdruk ter hoogte } x \\ \sigma_n &= \text{normaalspanning in de wand} \\ \sigma_t &= \text{tangentialspanning in de wand} \\ \delta &= \text{wanddikte} \\ db &= \text{duigbreedte} \\ m &= \text{contractiecoëfficiënt van Poisson} \\ R_x &= \text{straal van de wand } (\perp X\text{-as})\end{aligned}$$

$$p_x = \gamma c (h - x)$$

$$R_x = tx$$

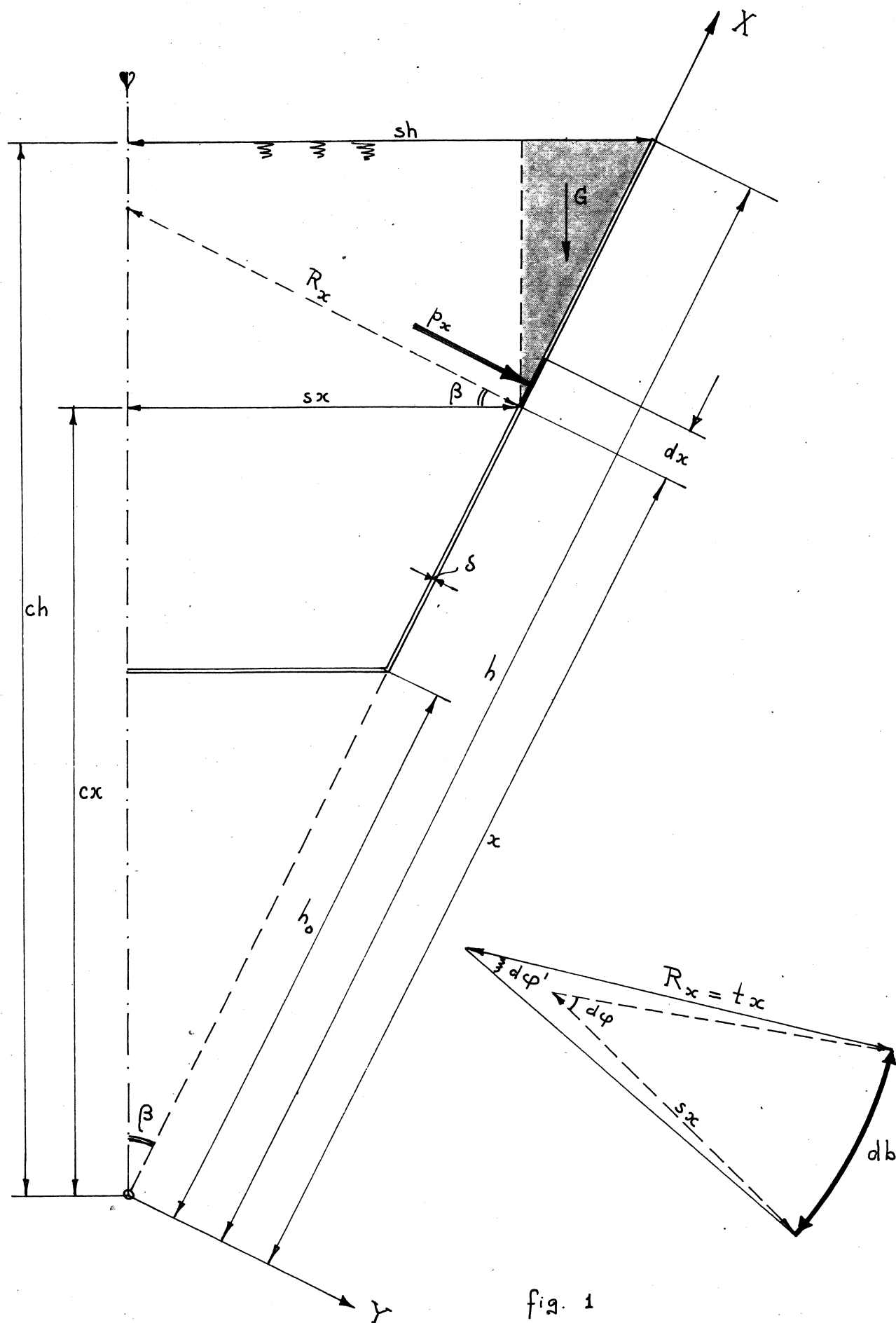


fig. 1

Gewicht water buiten de straal sx :

$$G = \gamma \left[\frac{1}{3} \pi c (h-x) (s^2 h^2 + s^2 x^2 + s^2 h x) - \pi c s^2 x^2 (h-x) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \pi c s^2 \gamma (h^3 - 3hx^2 + 2x^3) \quad \text{dus is}$$

$$\sigma_n' \cdot \delta \cdot c \cdot 2\pi s x = \frac{1}{3} \pi c s^2 \gamma (h^3 - 3hx^2 + 2x^3) \quad \text{m.a.w}$$

$$\sigma_n' = \frac{\gamma s}{6\delta} \cdot \frac{h^3 - 3hx^2 + 2x^3}{x} \quad (1)$$

Gewicht K van de bovenbouw :

Deze kracht K veroorzaakt een normaalspanning, welke gevonden wordt uit

$$\sigma_n'' \cdot \delta \cdot c \cdot 2\pi s x = K \quad \text{m.a.w}$$

$$\sigma_n'' = \frac{K}{2\pi \delta c s x} \quad (2)$$

Gewicht wand buiten de straal sx :

$$\text{wandoppervlak} = \pi (sh + sx) \sqrt{c^2 (h-x)^2 + (sh - sx)^2} =$$

$$= \pi s (h^2 - x^2) \quad \text{dus}$$

$$\text{wandgewicht} = \pi s \chi (h^2 - x^2) \cdot \delta \quad \text{Dan is}$$

$$\sigma_n''' \cdot \delta \cdot c \cdot 2\pi s x = \pi s \chi (h^2 - x^2) \cdot \delta \quad \text{m.a.w.}$$

$$\sigma_n''' = \frac{\chi}{2c} \cdot \frac{h^2 - x^2}{x} \quad (3)$$

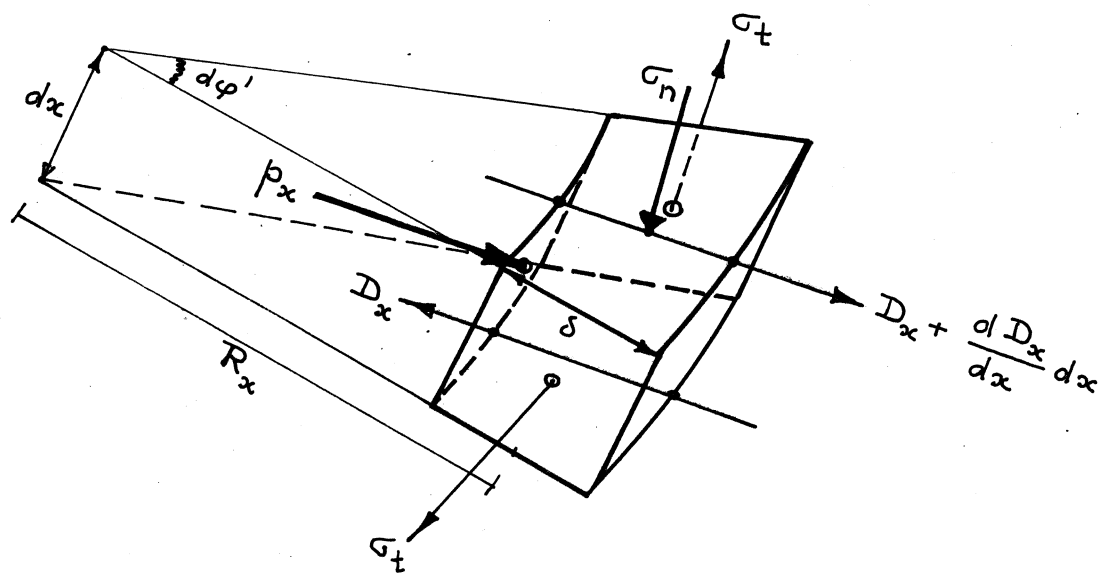


fig. 2

De totale normaalspanning is dus :

$$\sigma_n = \frac{\gamma_s}{6\delta} \cdot \frac{h^3 - 3hx^2 + 2x^3}{x} + \frac{K}{2\pi\delta c s x} + \frac{\chi}{2c} \cdot \frac{h^2 - x^2}{x} \quad (4)$$

Volgens fig. 1 is $db = R_x d\varphi' = s x d\varphi$ m.a.w.
 $d\varphi' = c d\varphi$

Uit fig. 2 volgt, dat σ_t en p_x radiaal een resultante geven, welke naar de as toe gericht is. De grootte is

$$dx \cdot \delta \cdot \sigma_t d\varphi' - dx \cdot db \cdot p_x \quad \text{of wel} \\ dx \cdot \delta \cdot \sigma_t c d\varphi - dx \cdot s x d\varphi \cdot p_x$$

De dwig ter breedte db kan nu worden beschouwd als een liggertje met een verdeelde belasting :

$$q_x = p_x s x d\varphi - \delta c \sigma_t d\varphi \quad (5)$$

$$\text{Nu is } \frac{dD_x}{dx} = -q_x \quad \text{dus}$$

$$\frac{dD_x}{dx} = \delta c \sigma_t d\varphi - p_x s x d\varphi \quad (6)$$

$$\text{waarin } D_x = -EI_x \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{en}$$

$$I_x = \frac{1}{12} db \cdot \delta^3 = \frac{1}{12} s x d\varphi \cdot \delta^3 \quad \text{m.a.w.}$$

$$\begin{aligned} \frac{dD_x}{dx} &= -E \left[I_x \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \frac{dI_x}{dx} \right] = \\ &= -\frac{1}{12} E s d\varphi \cdot \delta^3 \left[x \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} \right] \quad \text{dus} \end{aligned}$$

$$x \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{12}{E \delta^2} \sigma_t + \frac{12 x}{E \delta^3} \cdot p_x \quad (7)$$

Verband tussen σ_t en y :

De omtrek bij x was vóór wandrek $2\pi R_x$
 De " " " x is na wandrek $2\pi(R_x + y)$

De omtrek is dus langer geworden $2\pi y$ dus

$$\epsilon_t = \frac{2\pi y}{2\pi R_x} = \frac{y}{R_x} = \frac{\sigma_t}{E} + \frac{\sigma_n}{mE} \quad \text{waaruit volgt}$$

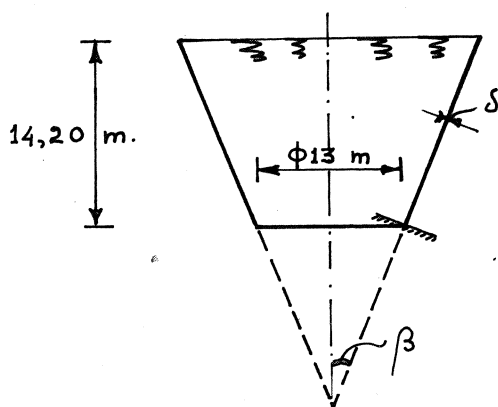
$$\sigma_t = \frac{E y}{R_x} - \frac{\sigma_n}{m} \quad (8)$$

Dit in vergelijking (7) geeft uiteindelijk met behulp van vergelijking (4) :

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + x \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{12}{t^2 \delta^2} \cdot y &= \\ = \frac{12}{E t \delta^2} \left[\frac{\gamma_s}{6m\delta} (h^3 - 3hx^2 + 2x^3) + \frac{\chi}{2mc} (h^2 - x^2) + \frac{K}{2\pi m \delta c s} \right] + \frac{12 \gamma_c}{E \delta^3} x^2 (h-x) \end{aligned} \quad (9)$$

Deze differentiaalvergelijking van de 4^e orde is niet in gesloten vorm oplosbaar. Voor de numerieke oplossing werd derhalve contact gezocht met het Mathematisch Centrum te Amsterdam.

De verstrekte gegevens voor het oplossen van (9) waren :



$$t = \frac{2}{14,5} \quad \gamma = 0,001 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$m = 3,5 \quad \chi = 0,00785 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

$$K = 25000 \text{ kg}$$

δ is variabel (1 à 1,5 cm)

Gevraagd werd :

Het verloop van y als functie van x voor verschillende wanddikten δ .

De randvoorwaarden waren :

$$x = h_0 \quad y = 0$$

$$\text{en} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = h \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\text{en} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

Ook werd gevraagd :

Het verloop van de spanningen als functie van x voor verschillende wanddikten δ .

Hiervoor geldt de formule :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI} = - \frac{W \cdot \sigma_x}{E \cdot W \cdot \frac{1}{2} \delta} = - \frac{\sigma_x}{\frac{1}{2} E \delta} \quad \text{m. a. w.}$$

$$\sigma_x = - \frac{1}{2} E \delta \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad (10)$$

N.B. Dit zijn de spanningen, welke het grootst zijn nabij de bodem en vandaar in hoogerichting vrij snel uitsterven.

De tangentiaalspanningen volgen uit (8).

Numeriek-analytische oplossing van de differentiaal vergelijking

Substitueren we $x = \bar{x} + h_0$ in (9) en laten het streepje weer weg dan wordt de oplossing van de volgende differentiaal vergelijking gevraagd

$$(11) \quad \begin{cases} (x+h_0)^2 y^{(4)} + (x+h_0) y^{(3)} + Ky = P(x), \text{ met} \\ P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3, \text{ en randvoorwaarden} \\ y = y' = 0 \quad \text{voor } x=0, \\ y^{(2)} = y^{(3)} = 0 \quad \text{voor } x=h-h_0=14.33 \text{ m.} \end{cases}$$

We beschrijven eerst de analytische methode, waarmee een oplossing is gevonden, vervolgens een numerieke.

De overeenkomst tussen beide methoden was frappant.

Substitueren we een machtreeks

$$(12) \quad y = \sum_{i=2}^{\infty} c_i x^i \quad \text{in (11) dan moeten de coëfficiënten}$$

voldoen aan

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \{ K c_i + c_{i+2}(i+2)(i+1)i^2 + c_{i+3}(i+3)(i+2)(i+1)(2i+1)h_0 + \\ + c_{i+4}(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)h_0^2 \} x^i + (6h_0 c_3 + 24h_0^2 c_4) + \\ + (72h_0^2 c_4 + 6c_3 + 120h_0^2 c_5)x = P(x). \end{aligned}$$

Vanwege de lineariteit van (11) kunnen we alle coëfficiënten als lineaire combinaties van c_2 en c_3 opvatten.

$$c_i = \alpha_i^0 + \alpha_i^1 c_2 + \alpha_i^2 c_3.$$

Voor de α 's vinden we dan de volgende recurrente betrekkingen

$$\alpha_4^0 = \frac{p_0}{24 h_0^2}, \quad \alpha_4^1 = 0, \quad \alpha_4^2 = -\frac{1}{4 h_0},$$

$$\alpha_5^0 = \frac{p_1}{120 h_0^2} - \frac{p_0}{40 h_0^3}, \quad \alpha_5^1 = 0, \quad \alpha_5^2 = \frac{1}{10 h_0^2},$$

$$\alpha_{i+4}^j = - \frac{K \alpha_i^j + (i+2)(i+1)i^2 \alpha_{i+2}^j + h_0(i+3)(i+2)(i+1)(2i+1) \alpha_{i+3}^j - r_i^j}{h_0^2(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)}$$

voor $i \geq 2$, met $r_2^0 = p_2$, $r_3^0 = p_3$ en verder alle $r_1^j = 0$.

Voor $x < h_0/2$ convergeert deze reeks.

De randvoorwaarden zijn eenvoudig aan te passen. We kunnen C_2 en C_3 namelijk berekenen uit

$$\left. \begin{aligned} y^{(2)} &= \sum_{j=2}^{\infty} i(i-1) \{ \alpha_1^0 + \alpha_1^1 C_2 + \alpha_1^2 C_3 \} x^{i-2} = 0 \\ y^{(3)} &= \sum_{j=3}^{\infty} i(i-1)(i-2) \{ \alpha_1^0 + \alpha_1^1 C_2 + \alpha_1^2 C_3 \} x^{i-3} = 0 \end{aligned} \right\} x=h-h_0$$

Dit proces is omgezet in een ALGOL-60 programma en op de X1 rekenmachine gedraaid.

Het bleek helaas, dat hoewel de reeks convergeert, boven beschreven methode toch niet geschikt was. Dit werd veroorzaakt door het zeer sterke alternen van de reeks, zodat alle precisie verloren ging.

Uit de impasse raakten we door volgende redenering op te zetten.

Het is uit de praktijk bekend, en later werd dit op numerieke wijze bevestigd, dat $y^{(3)}$ en $y^{(4)}$ voor $x > 1$ meter bijzonder klein moeten worden.

Verwaarlozen we deze termen in (11) dan is de oplossing van het probleem snel gevonden $y = \frac{P(x)}{K}$. (voor $x > 1$ meter)

Voor $0 \leq x \leq 1$ probeerden we weer de differentiaalvergelijking op te lossen, maar nu met randvoorwaarden

$$y = y' = 0 \quad \text{voor } x=0$$

$$y = \frac{P(x)}{K}, \quad y' = \frac{P'(x)}{K} \quad \text{voor } x = 1.$$

Berekening op de X1 (Het ALGOL Programma staat achterin het rapport) toonde aan dat het sterke alternen verdwijnt, zodat slechts één decimaal verloren gaat.

In fig.6 is de oplossing voor $\delta = 12$ mm getekend, naast het polynoom $\frac{P(x)}{K}$ en de oplossing die op numerieke wijze gevonden werd.

De overeenstemming voor $x < 1$ m. is duidelijk.

Omdat in het ALGOL programma gebaseerd op bovenstaande methode een fout werd gemaakt die pas veel later werd gevonden en hersteld, met het vermelde resultaat, is ook op zuiver numerieke wijze naar een oplossing van (11) gezocht.

Het interval $(0, h-h_0)$ werd in 200 deelintervallen verdeeld. In elk der deelpunten werd (11) door een differentie schema vervangen.

We krijgen door de afgeleiden te vervangen door differenties

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 \Delta^4 f(x_{i-2}) + \rho x_1 \frac{\Delta^3 f(x_{i-1}) + \Delta^3 f(x_{i-2})}{2} + \rho^4 f(x_i) = \rho^4 P(x_i) \\ \text{of } (x_1^2 + \frac{\rho x_1}{2}) f(x_{i+2}) - (4x_1^2 + \rho x_1) f(x_{i+1}) + (6x_1^2 + \rho^4 K) f(x_i) + \\ - (4x_1^2 - \rho x_1) f(x_{i-1}) + (x_1^2 - \frac{\rho x_1}{2}) f(x_{i-2}) = \rho^4 P(x_i) \end{array} \right.$$

waarin ρ de staplengte is met $x_i = \frac{14.33}{200} i$, $i=1, \dots, 201$, $\rho = 0.0716$

en randvoorwaarden

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

$$f(x_{198}) - 3 f(x_{199}) + 3 f(x_{200}) - f(x_{201}) = 0$$

$$f(x_{199}) - 2 f(x_{200}) + f(x_{201}) = 0.$$

Het stelsel van 201 vergelijkingen met 201 onbekenden werd opgelost, weer met behulp van de X1.

Voor $x < 1$ meter bleek het schema te grof te zijn.

Daarom werd het interval $(0, 2.1500)$ nogmaals in 400 deelintervallen verdeeld. Voor de 401 deelpunten, zijn weer de vergelijkingen (13) opgezet maar nu zo dat aan het eind van het interval de oplossing werd aangepast aan de gevonden oplossing met behulp van het 201 punts schema.

Waarbij dus

$$x_i = \frac{14.33}{200} \cdot \frac{30}{400} \cdot i \quad i=1, 2, \dots, 401, \rho = 0.0054$$

en $f(x_{401}) = f(x_{31}^*) =$ de bovengevonden waarden bij

$$x^* = \frac{14.33}{200} \cdot 30 = 2.150$$

$$f(x_{400}) = \sum_{n=0}^5 \frac{\rho^* (\rho^* - \rho) \dots (\rho^* - (n-2) \rho)}{(n-1)! \rho^{n-1}} \Delta^n f(x_{31}^*)$$

met $\rho^* = 0.0716$.

De oplossing van dit stelsel vergelijkingen is in fig.3 in tekening gebracht voor $\delta = 10, 11, 12, 13, 15$ mm.

De tweede afgeleiden zijn berekend met een zes punts voorwaards gericht differentie schema.

De spanningen volgen dan uit (10) en we vinden

$$\sigma_x(x_i) = -\frac{1}{2} E \delta \frac{1}{\rho^2} \left[\Delta^2 f(x_i) - \Delta^3 f(x_i) + \frac{11}{12} \Delta^4 f(x_i) - \frac{5}{6} \Delta^5 f(x_i) + \frac{137}{180} \Delta^6 f(x_i) \right]$$

voor $x_i = 0.0054 i$, $i=1,2,\dots, 394$.

De spanningen zijn in fig.4 weergegeven.

Het ALGOL programma staat achterin het rapport.

In fig.3 zijn weergegeven de uitwijkingen y van de wand over de eerste 2 m., als functie van de afstand tot de bodem en wel voor verschillende dikten van de wand.

De spanningen σ_x over hetzelfde deel van de wand weergegeven in fig.4. In fig.5 zijn getekend de maximum spanningen σ_x nabij de inklemming in de bodem.

In fig.6 zijn uitgezet de uitwijkingen y gevonden op numerieke wijze, de y die aan de differentiaal vergelijking voldoet en voor $x=1$ m. aangepast is aan het polynoom $P(x)/K$, en tenslotte dit polynoom.

Tenslotte staat in fig.7 y uitgezet tegen x , waarbij x van 0 tot 14.33 m. loopt, bij $\delta = 12$ mm. y is berekend uit het 201 punts-schema.

Aangezien de max.spanning σ_x het bedrag 1400 kg/cm^2 niet mag overschrijden, daarbij tevens inbegrepen een zekere veiligheid i.v.m. corrosie, is de uiteindelijke wanddikte nabij de bodem op 13 mm. aangehouden.

Daar de invloed van een storing zich uitstrekt over gemiddeld 1,30 m. (zie fig.3 en 4), is het zonder meer duidelijk, dat de wanddikte naar boven kan worden verkleind.

Aangenomen is hiervoor:

vanaf de bodem tot $\frac{h-h_0}{4}$	13 mm. dikte
" $\frac{h-h_0}{4}$ tot $\frac{h-h_0}{2}$	11 mm. dikte
" $\frac{h-h_0}{2}$ tot $3\frac{h-h_0}{4}$	9 mm. dikte
" $3\frac{h-h_0}{4}$ tot $h-h_0$	7 mm. dikte

comment Programma voor de berekening van de vormverandering van de Watertoren.
 De berekening geschiedt met behulp van een machtreeks die voor $x = 1$ m.
 aangepast wordt aan het polynoom $P(x)/K$.
 De dikte delta wordt in mm. in XEEN (63) ingesteld.
 In XEEN (63) wordt na het stoppen van de X1 het benodigde aantal termen van de
 machtreeks ingesteld. Als XEEN (64) = 64 dan typt de X1 alle tussen-resultaten
 van de partiele sommen uit.;

```

begin  real a, d, K, C2, C3, delta, X, Y. a1, a2, a3, a4, h, P, Q, R, S;
       integer i, j, k; array A, B [0:2], al [0:2, 2:100];
       NLCR; delta := XEEN (63)/10; PRINTTEXT ({delta =}); FIXT (1, 1, delta); NLCR;
       stop; a:= 47.5711638; h:= 61.905 60467; a1:= 2.6955 6769310-2/delta3;
       a2:= 4.6899 0435210-2/delta2; a3:= 3.4794 8433210-1/delta3; a4:= 5.6606 921
       810-1/delta3; P:= a1 x h3 - 3 x a1 x h x a2 + 2 x a1 x a3 +
       a2 x h2 - a2 x a2 + a3 + a4 x h x a2 - a4 x a3;
       Q:= - 6 x a1 x h x a + 6 x a1 x a2 - 2 x a2 x a + 2 x h x a4 x a - 3 x
       a4 x a2; R:= - 3 x a1 x h + 6 x a1 x a - a2 + a4 x h - 3 x a4 x a;
       S:= 2 x a1 - a4; K:= .6307510-7/delta2; X:= 1; Y:=X;
AA1:  PRINTTEXT ({De coeff. van het polynoom zijn :}); NLCR; FLOT (5, P);
       FLOT (5, Q); FLOT (5, R); FLOT (5, S); NLCR;
       al [0, 2]:= al [2, 2]:= al [0, 3] := al [1, 3]:= al [1, 4]:= al [1, 5]:= 0;
       al [1, 2]:= al [2, 3]:= 1; al [0, 4]:= P / (24 x a x a); al [2, 4]:=
       - 1/(4 x a); al [0, 5]:= - P/(40 x a3) + Q/(120 x a2); al [2, 5]:=
       1/(10 x a2); A [0]:= - (P + Q x X + R x X2 + S x X3)/K;
       B [0]:= - (Q + 2 x R x X + 3 x S x X2)/K;
AA2:  for i:= 1, 2 do begin A [i]:= B [i]:= 0 end;
       for j:= 2 step 1 until XEEN (63) do
       begin  real m; m:= (j + 2) x (j + 1); for i:= 0, 1, 2 do
       begin  al:= if i = 0 ^ j = 2 then R else if i = 0 ^ j = 3 then
       S else 0; al [i, j + 4]:= (- (K x al [i, j] + m x j2 x
       al [i, j + 2] + a x (j + 3) x m x (2 x j + 1) x al [i, j + 3])
       + a1)/(a x a x (j + 4) x (j + 3) x m);
       B [i]:= B [i] + j x Y x al [i, j]; A [i]:= A [i] +
       Y x X x al [i, j]
       end; if XEEN (64) = 64 then begin FIXT (2, 0, j);
       for i:= 0, 1, 2 do begin FLOT (5, A [i]); FLOT (5, B [i]) end;
       NLCR end; Y:= Y x X
       end; C2:= A [1] x B [2] - A [2] x B [1]; C3:= (A [0] x B [1] - A [1] x
       B [0])/C2; C2:= (A [2] x B [0] - A [0] x B [2])/C2; NLCR;
       PRINTTEXT ({C2 en C3 zijn:}); print (C2); print (C3); NLCR; k:= XEEN (63);
AA3:  for j:= 2 step 1 until k do al [0, j]:= al [0, j] + al [1, j] x C2 +
       al [2, j] x C3; NLCR; PRINTTEXT ({De coeff. zijn:}); NLCR;
       for j:= 2 step 1 until k do begin print (al [0, j]); if ((j-2):7)x7 - j + 2
       = 0 then NLCR end; NLCR; NLCR;
       PRINTTEXT ({voor x is is de uitwijking en de spanning:}); NLCR;
       for i:= 0 step 1 until 25, 26 step 2 until 74, 75 step 5 until 200, 220
       step 20 until 400 do
       begin  a:= 0; al:= 0; Y:= 1; d:= -14.3344408 x .37510-3 x i;
       for j:= 2 step 1 until k do
       begin  al:= al + al [0, j] x Y x d2; a:= a + j x (j - 1) x
       al [0, j] x Y; Y:= Y x d
       end; FIXT (3, 2, d); TAB; FLOT (4, a1); TAB; FLOT (4, a x
       (-1.05104 x delta)); NLCR
       end
end

```

comment Dit programma berekent de vorm van de Watertoren met behulp van differentie-schema's. Eerst een globale oplossing met een 201 punts-schema, vervolgens de oplossing van een 401 punts-schema, waarbij y aangepast is aan de gevonden globale oplossing voor $x = + 2$ m. De dikte delta wordt in mm. in XEEN (63) gezet. Nadat de X1 de maximale spanning berekend heeft, stopt hij, opdat nagegaan kan worden of het zinvol is de oplossing uit te ponsen. Wil dit geschieden, dan moet XEEN (64) = 64. Dit programma gebruikt de MCP's MAX, PROD en DSBAND;

```

begin  real aa,K,delta,a1, a2, a3, a4, h, P, Q, R, S;
       integer i; array A [1:401,1:6], B [1:9];
       real procedure MAX(k,a,b,fk);
       value a,b; integer k,a,b; real fk;
       begin real r,s;
MA      : k:= a; if k < b then MAX:= s:= fk; goto MC;
MB      : k:= k + 1; r:= fk;
           if r > s then begin MAX:= s:= r; a:= k end;
MC      : if k < b then goto MB; k:= a
       end MAX;
       real procedure PROD(k,a,b,fk);
       value a,b; integer k,a,b; real fk;
       begin real p; p:= 1;
           for k:= a step 1 until b do p:= fk x p;
       PROD:= p
       end PROD;
       real procedure DSBAND (A,m,l,b,n); value m,l,b,n; integer m,l,b,n; array A;
       begin integer i,j,k; real w;
ELIM:   for k:= 1 step 1 until m do
           begin l:= if k + b < m then l + 1 else m; MAX (i,k,l,abs (A[i,1]));
               if i + k then for j:= 1 step 1 until n do
                   begin w:= - A[i,j]; A[i,j]:= A[k,j]; A[k,j]:= w end;
                   for i:= k + 1 step 1 until l do
                       begin w:= A[i,1] / A[k,1];
                           for j:= 2 step 1 until n do
                               A[i, if j < b then j - 1 else j]:= A[i,j] -
                                   w x A[k,j]; A[i,b]:= 0
                           end
                       end ELIM;
DSBAND:= PROD (k,1,m,A[k,1]);
BACK:   for j:= b + 1 step 1 until n do for k:= m step - 1 until 1 do
           A[k,j]:= (A[k,j] - SUM (i,2, if k + b < m then b else m - k + 1,
           A[k,i] x A[k + i - 1,j]))/A[k,1]
       end DSBAND;

       real procedure Matrix (l, br, B); value l; real br; integer l; array B;
       begin real a, b, dx; integer i;
           dx:= br/l; A [1, 2]:= A [1, 3]:= A [1, 4]:= A [1, 5]:= A [2, 1]:=
           A [2, 3]:= A [2, 4]:= A [2, 5]:= 0; A [1, 1]:= A [2, 2]:= 1;
           A [1, 6]:= A [2, 6]:= 0; for i:= 3 step 1 until l - 1 do
               begin a:= 47.5711638 + (i - 1) x dx; b:= a/2; a:= dx x a;
                   A [i, 1]:= b - a/2; A [i, 2]:= -4 x b + a; A [i, 3]:=
                   6 x b + dx ^4 x K; A [i, 4]:= -4 x b - a; A [i, 5]:= b + a/2;
                   A [i, 6]:= dx ^4 x (P + Q x (i - 1) x dx + R x ((i - 1)
                   x dx) ^2 + S x ((i - 1) x dx) ^3)
               end;
           A [1, 1]:= A [1 + 1, 1]:= A [1 + 1, 2]:= 0;

```

```

for i:= 1, 2, 3, 4, 5 do A [1, i + 1] := B [i]; for i:= 1, 2, 3,
4 do A [1 + 1, i + 2] := B [i + 5];
Matrix:= DSBAND (A, 1 + 1, 2, 5, 6)

```

```

end;

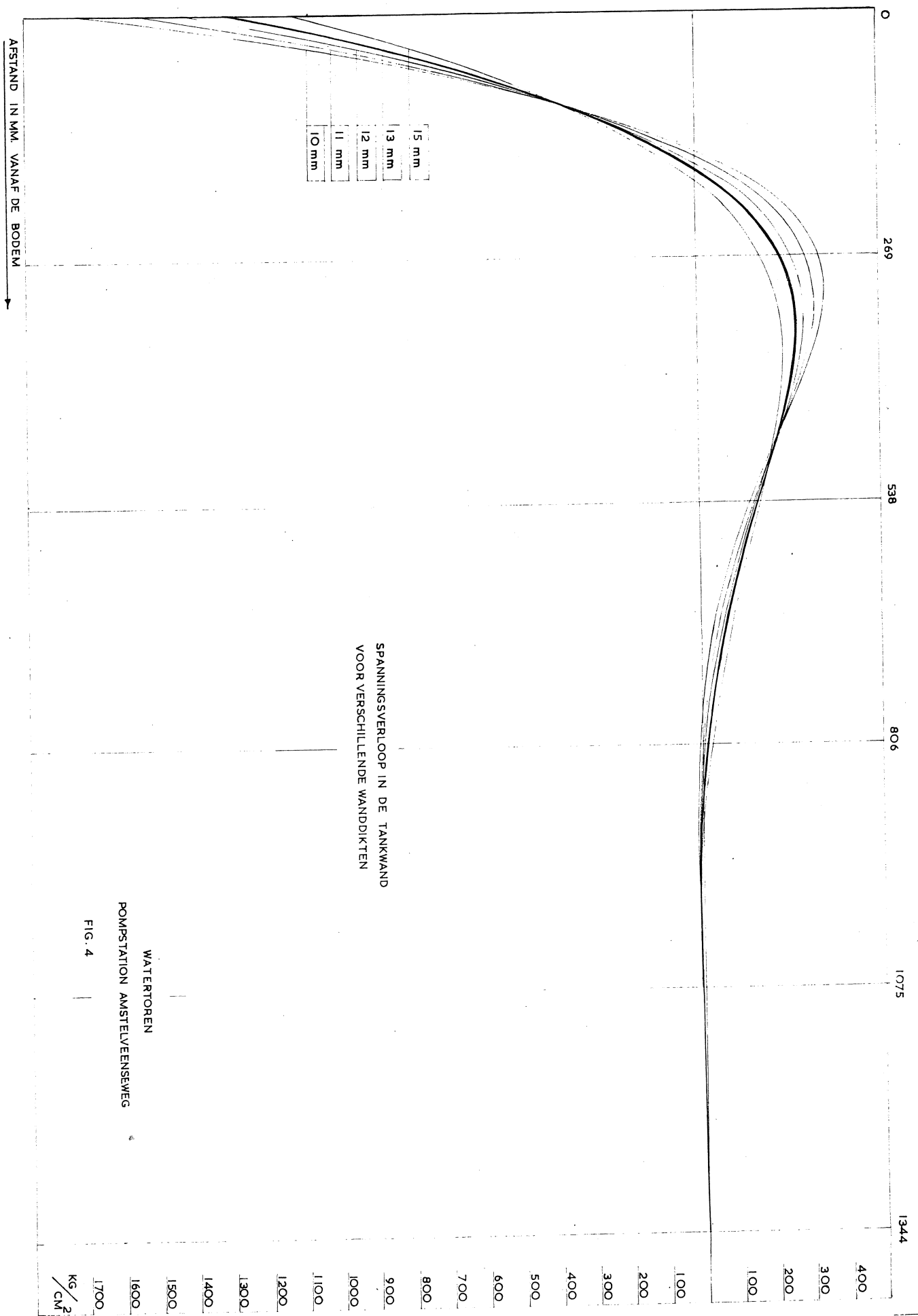
```

```

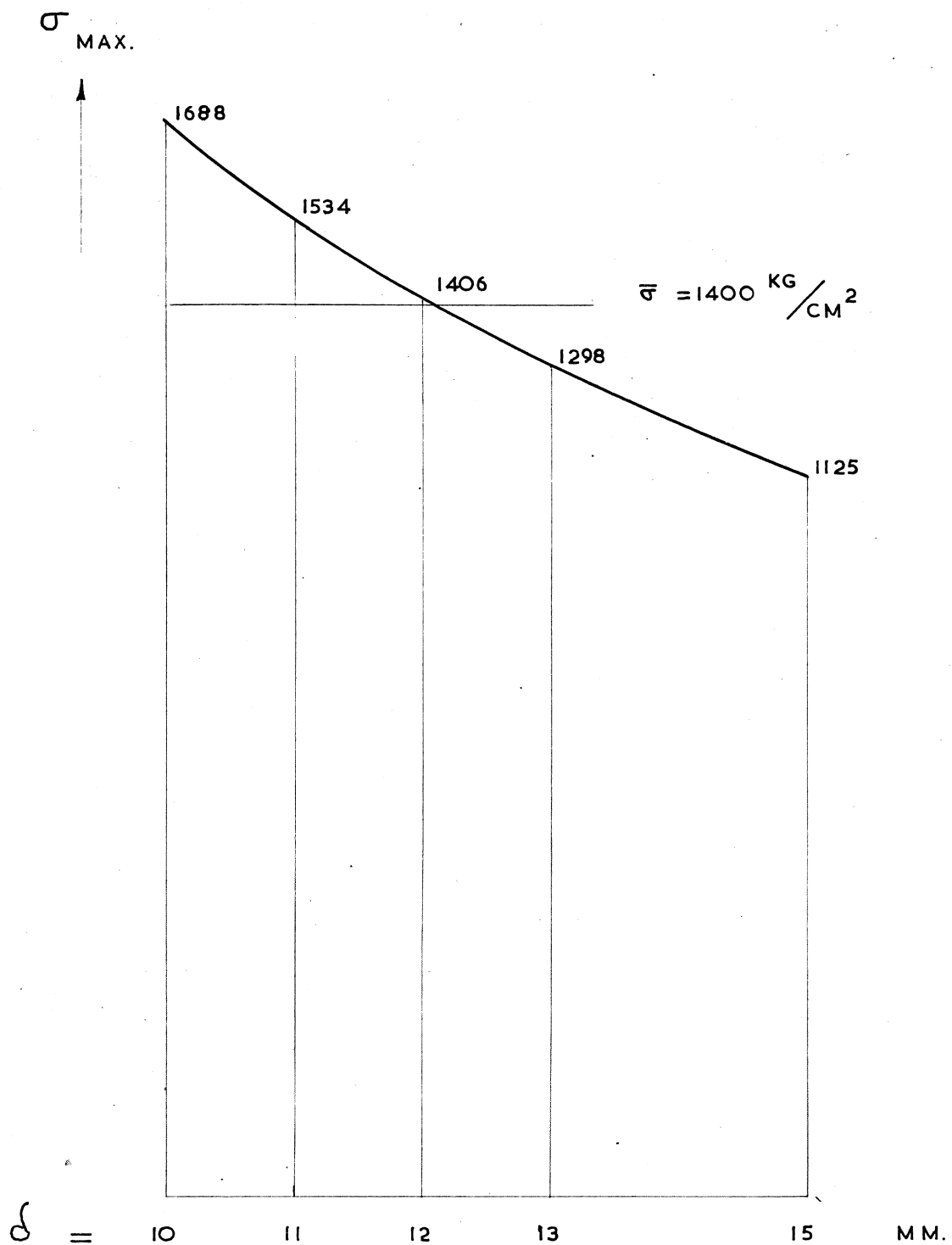
NLCR; delta:= XEEN (63)/10; NLCR; PRINTTEXT ({delta = }); FIXT (1, 1, delta);
PRINTTEXT ({ centimeter.}); NLCR; aa:= 47.5711638;
h:= 61.905 60467; a1:= 2.6955 6769310-2/delta3; a2:= 4.6899 0435210-2/
delta2; a3:= 3.4794 8433210-1/delta3; a4:= 5.6606 921810-1/delta3;
P:= a1 x h 3 - 3 x a1 x h x aa 2 + 2 x a1 x aa 3 + a2 x h 2 -
a2 x aa 2 + a3 + a4 x h x aa 2 - a4 x aa 3;
Q:= -6 x a1 x h x aa + 6 x a1 x aa 2 - 2 x a2 x aa + 2 x h x a4 x aa -
3 x a4 x aa 2; R:= -3 x a1 x h + 6 x a1 x aa - a2 + a4 x h - 3 x a4 x
aa; S:= 2 x a1 - a4; K:= .6307510-7/delta2;
B [1]:= 1; B [2]:= -3; B [3]:= 3; B [4]:= -1; B [5]:= 0; B [6]:= 1;
B [7]:= -2; B [8]:= 1; B [9]:= 0; PUNLCR; FLOP (6, 3, Matrix (200, 14.3344
4087, B)); PUTTEXT ({ uitwijkingen voor delta = }); FIXP (2, 2, delta);
PUNLCR; for i:= 1 step 1 until 200 do FLOP (4, 2, A [i, 6]); STOPCODE;
for i:= 1, 2, 4, 6, 7 do B [i]:= 0; B [3]:= B [8]:= 1; B [5]:= A [30, 6] x
1.78209 903423 - A [31, 6] x .41235 78778 + A [32, 6] x .42726 121405 -
A [33, 6] x .28831 42155 + A [34, 6] x .10878 11304 - A [35, 6] x
.01746 928498; B [9]:= A [30, 6]; PUNLCR; FLOP (6, 3, Matrix (400, 2.1501
661305, B)); for i:= 1 step 1 until 394 do A [i, 1]:= - 2.0187 974510-6 x
(782 x A [i, 6] - 3102 x A [i + 1, 6] + 5355 x A [i + 2, 6] - 5230 x
A [i + 3, 6] + 3030 x A [i + 4, 6] - 972 x A [i + 5, 6] + 137 x
A [i + 6, 6]) x delta; NLCR; PRINTTEXT ({De maximale spanning is:});
FIOT (5, MAX (1, 1, 394, abs (A [i, 1]))); PRINTTEXT ({ kg /cm2 voor x =
}); FIXT (2, 5, i x .53754 153210-2); stop; if XEEN (64) = 64 then
begin PUNLCR; PUTTEXT ({voor kleine x zijn de uitwijkingen :}); PUNLCR;
for i:= 1 step 1 until 400 do FLOP (4, 2, A [i, 6]); TAPEND;
PUNLCR; PUTTEXT ({en de spanningen :}); PUNLCR;
for i:= 1 step 1 until 394 do FLOP (4, 2, A [i, 1]); STOPCODE
end;
EIND: end

```

dec. 1962



MAX. SPANNINGSVERLOOP BIJ DE BODEMPLAAT
VOOR VERSCHILLENDE WANDDIKTEN



WATERTOREN
POMPSTATION AMSTELVEENSE WEG
FIG. 5